ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ:	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**14 / 03 / 2026**

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f

είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

β) Να αναφέρετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 3 + 2 = 5

Α3. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, πότε λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν για δύο συναρτήσεις f , g που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

β. Έστω συνάρτηση f συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 \in \Delta$, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$.

δ. Για μια σταθερή συνάρτηση c η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta c\,dx = c(\beta - \alpha)$.

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες με f', g' συνεχείς, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta + \int_\beta^\alpha f'(x)g(x)dx.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-2\ln x+\alpha,\ x>0$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Μονάδες 4

Β2. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία (μονάδες 5) και να αναφέρετε την θέση και το είδος του ακρότατου της (μονάδες 2).

Μονάδες 7

Β3. Αν το σημείο $K(2,2)$ είναι το ελάχιστο της f, να δείξετε ότι:

(i) $\alpha=\ln 4$

(ii) $4e^{x}\geq(xe)^{2}$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 3 + 4 = 7

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{e}\left(f(x)-2\ln 2\right)dx$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to R$ για τις οποίες ισχύει:

- $xf'(x)=\dfrac{1}{x}-f(x),\ x>0$
- $g(x)=x\cdot f(x)-\ln x,\ x>0$
- $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-e$

Γ1. Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή (μονάδες 3) και στην συνέχεια να βρείτε την τιμή της σταθεράς της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x>0$ (μονάδες 2) και στην συνέχεια να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}x^{3}\cdot f'(x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Γ3. Να εξετάσετε:

(i) αν η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0,1]$

(ii) την συνάρτηση h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4 + 4 = 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=\int_1^{e^2}\frac{h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ είναι αδύνατη .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\frac{\alpha^x}{x}$, $\alpha>0$ και για την οποία ισχύει $e^{\alpha-f(x)}\le 1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της f

(ii) το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(f(x)-2)=e$ στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 4 + 3 = 7

Δ3. **(i)** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα (μονάδες 3) και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής (μονάδα 1)

(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει:

$(x+1)f(x+2026)<xf(2027)+f(x^2+2026)$.

Μονάδες 4 + 4 = 8

Δ4. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση

$\phi(x)=x^2+\left(f(e^{\mu})+f(e^{\lambda+1})-2e-1\right)\cdot x-f(e\cdot e^{\lambda})+2e$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

Μονάδες 5